Ukázka zápočtového testu MAI 2 (LS 2013/14)

1. Na maximálních možných intervalech najděte primitivní funkci

$$\int \frac{\log x+1}{x\left(\log^3 x+8\right)}\,dx \quad .$$

(10 bodů)

2. Spočítejte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací rovinné oblasti ω kolem osy x, kde

$$\omega=\left\{\left[x,y\right]\in R^2;\ 0\le x\le 1 \wedge 0\le y\le \sqrt{x}\cdot arctg\, x\right\}$$ (10 bodů)

nebo

Vypočítejte integrál $\int_0^1 \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,dx$. Je tento integrál Riemannův nebo Newtonův? (10 bodů)

3. Je dána funkce $f(x,y)=\log\left(\sqrt{y+1}-x\right)$.
   a) Najděte definiční obor D funkce g a nakreslete jej.
   b) Vypočítejte $\nabla f(0,0)$;
   c) Ukažte, že funkce f je v bodě $[0,0]$ diferencovatelná.
      Určete v tomto bodě totální diferenciál a rovnici tečné roviny .
   d) Vypočítejte přibližně pomocí lineární aproximace f(- 0,04; 0,02).

(10 bodů)

4. Vyšetřete globální extrémy na množině M a lokální extrémy funkce f uvnitř M, je-li

$$f(x,y)=x.\sin y+x^2 \quad \text{a} \quad M=\left\{[x,y]\in R^2;\ -1\le x<1,\ 0\le y<\tfrac{7}{4}\pi\right\} \quad .$$

(10 bodů)

nebo

4. Vyšetřete globální extrémy funkce f na množině M , je-li:

$$f(x,y,z)=xy+z^2,\quad M=\left\{(x,y,z)\in R^3;\ x^2+y^2+z^2\le 1\wedge x\ge 0\right\};$$

(10 bodů)

nebo

4. a) Ukažte, že rovnicí $z^3+x^3z-xyz^2+y^3-2=0$ a podmínkou $z(1,1)=1$
   je definována v okolí bodu $(1,1,1)$ implicitní funkce $z=z(x,y),\ z\in C^1(U(1,1))$.
   b) Pomocí lineární aproximace vypočítejte přibližně hodnotu z(1,01; 0,96).

(10 bodů)

nebo

4. a) Ukažte, že rovnicí $x^2+2y^2+z^2-2xy-4x+2y+4=0$ a podmínkou $z(3,1)=1$
   je definována v okolí bodu $(3,1,1)$ implicitní funkce $z=z(x,y)\in C^2(U(3,1))$.
   b) Ukažte, že bod $(3,1)$ je stacionárním bodem funkce $z=z(x,y)$.
   Vyšetřete, zda funkce $z=z(x,y)$ má v bodě $(3,1)$ lokální extrém.

(10 bodů)